7.3 Cebirsel Lineer Denklem Sistemleri, Lineer Bağımsızlık, Özdeğer, Özvektörler.

n-değişkenli (bilinmeyenli) n-denklem sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned} \qquad (7.7)$$

(7.7)'yi A $n\times n$ tipinde katsayılar matrisi ve b $n\times 1$ tipinde verilen vektör olmak üzere

$$Ax=b \qquad (7.8)$$

formunda yazabiliriz. $b=0$ ise sisteme <u>homojen</u>, diğer durumda <u>homojen olmayan</u> sistem denir.

Eğer katsayılar matrisi A'nın determinantı sıfırdan farklı ise yani A'nın tersi varsa (7.8) sisteminin yalnız bir çözümü vardır. (7.8)'in her iki tarafını A^{-1} ile çarparak, çözümün

$$x=A^{-1}b$$

olduğu görülür. Özel olarak sistem homojen ise yani $b=0$ ise yalnız $x=0$ aşikar çözümü vardır.

Eğer A singüler ise, yani $\det A=0$ ise (7.8)'in ya çözümü yoktur yada çözüm tek değildir. Homojen sistemin aşikar çözümünün yanında sonsuz (sıfırdan farklı) çözümü vardır. Homojen olmayan

sistemlerde b belli şartı sağlamazsa çözüm yoktur. Bu şart, A'nın eki A^* olmak üzere $A^*y=0$ şartını sağlayan bütün y vektörleri için

$$(b,y)=0$$

dır. Bu şartı sağlayan (7.8) sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır. Bu çözümler, x^0 (7.8)'in bir özel çözümü ve ξ, homojen kısmın herhangi bir çözümü olmak üzere

$$x=x^{(0)}+\xi$$

formundadır.

Bir lineer denklem sistemini çözmenin en iyi yolu satır-basamak form haline getirmektir. (Ayrıntı için bak: lineer cebir notları). (7.8) denklem sisteminde katsayılar matrisi A'ya b vektörünü ekliyerek genişletilmiş katsayılar matrisi $(A{:}b)$'yi elde ederiz. Bu matrisi elementer satır işlemleri ile üçgensel form haline getirip çözümü kolaylıkla bulabiliriz.

<u>Örnek1)</u> $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=7\\ 2x_1+x_2+2x_3&=2\\ -x_1+2x_2+3x_3&=1 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 2 & 4\\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_3\to c_1+c_3]{c_2\to -2c_1+c_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7\\ 0 & 5 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

$4x_3=8 \Rightarrow x_3=2$

$5x_2=-10 \Rightarrow x_2=-2$

$x_1-2x_2+x_3=7 \Rightarrow x_1=1$

$x=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

2) $x_1+2x_2-x_3=2$ lineer denklem sistemini çözünüz.
$2x_1+x_2+x_3=1$
$x_1-x_2+2x_3=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\end{array}\right) \xrightarrow[c_3=-c_1+c_2]{c_2\to -2c_1+c_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3 & -3\end{array}\right) \xrightarrow{c_3\to -c_2+c_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$-3x_2+3x_3=-3 \quad x_3=t\in\mathbb{R} \qquad x_1+2x_2-x_3=2 \Rightarrow x_1=2-2(1+t)+t$
$x_2=1+t \qquad\qquad\qquad =-t$

$$x=\begin{pmatrix}-t\\ 1+t\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Lineer Bağımsızlık.

$$c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}+\dots+c_kx^{(k)}=0 \qquad (7.9)$$

denklemini sağlayan en azından bir tanesi sıfırdan farklı $c_1,c_2,\dots,c_k$ (kompleks) sayıları varsa $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(k)}$ vektörlerine <u>lineer bağımlı</u> vektörler denir. (7.9) denklemini yalnız $c_1=c_2=\dots=c_k=0$ sayıları sağlıyorsa $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(k)}$ vektörlerine <u>lineer bağımsız</u> vektörler denir.

n bileşene sahip n vektör kümesini düşünelim. $x^{(j)}$ vektörünün $i.$ bileşeni $x_{ij}=x_i^{(j)}$ olsun. $X=(x_{ij})$ dersek (7.9) denklemini

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}c_1+\dots+x_1^{(n)}c_n\\ \vdots\\ x_n^{(1)}c_1+\dots+x_n^{(n)}c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11}c_1+\dots+x_{1n}c_n\\ \vdots\\ x_{n1}c_1+\dots+x_{nn}c_n\end{pmatrix}=Xc=0$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer $\det X\neq 0$ ise bu denklemin yalnız $c=0$ çözümü olur. Yani $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(n)}$ vektörlerinin lineer bağımsız

olması için gerek ve yeter şart $\det X\neq 0$ olmasıdır.

<u>Örnek:</u> $x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $x^{(2)}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $x^{(3)}=\begin{pmatrix}-4\\1\\-11\end{pmatrix}$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını belirleyiniz. Lineer bağımlı ise aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

Vektörleri x_{ij} matris formunda yazar, determinantına bakarsak;

$$\det X=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -11\end{vmatrix}=0$$

olduğu görülür. Yani vektörler lineer bağımlıdır.

$$c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}+c_3x^{(3)}=0$$

denklemini çözersek;

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -11 & 0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0\\ 0 & -3 & 9 & 0\\ 0 & 5 & -15 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0\\ 0 & -3 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \quad \begin{array}{l}-3c_2+9c_3=0\\ c_3=t\\ c_2=3t\end{array}$$

$c_1+2c_2-4c_3=0 \Rightarrow c_1=-2t \qquad t=1$ alırsak $c_1=-2,\ c_2=3,\ c_3=1$

$$-2x^{(1)}+3x^{(2)}+x^{(3)}=0$$

dır.

$$c_1x^{(1)}(t)+c_2x^{(2)}(t)+\dots+c_kx^{(k)}(t)=0$$

denklemini sağlayan en azından bir tanesi sıfırdan farklı $c_1,c_2,\dots,c_k$ sayıları varsa $\alpha<t<\beta$ aralığında $x^{(1)}(t),\dots,x^{(k)}(t)$ vektör fonksiyonlarına <u>lineer bağımlı</u>, diğer durumda yani $c_1=c_2=\dots=c_k=0$ olması durumunda <u>lineer bağımsız</u> denir.

Özdeğer ve özvektörler.

$$Ax=y$$

denklemine verilen x vektörünü, yeni bir y vektörüne dönüştüren lineer dönüşüm olarak bakabiliriz. Çoğu uygulamalarda verilen vektörü kendisinin belli katına dönüştüren dönüşümler önemli rol oynar. Buna göre $y=\lambda x$ vektörünü bulmak için

$$Ax=\lambda x$$

veya

$$(A-\lambda I)x=0 \qquad (7.10)$$

denkleminin çözümüne bakmamız gerekir. Burada λ bir skalerdir. (7.10) denkleminin sıfırdan farklı çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0 \qquad (7.11)$$

olmasıdır. (7.11) denklemini sağlayan λ değerlerine A matrisinin özdeğerleri denir ve bu λ değerlerini kullanarak elde edilen sıfırdan farklı çözümlere de (vektörlere de) bu özdeğerlere karşı gelen özvektörler denir.

(7.11) denklemi λ'ya göre n. dereceden polinom olduğu için n tane $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğeri vardır. Bu özdeğerlerden bazıları aynı olabilir. Eğer (7.11) denkleminin bir kökü m kere

görünüyorsa bu özdeğer m katlılığa sahiptir denir. Özdeğer 1 katlılığa sahipse basit denir. Eğer n tane farklı özdeğer varsa yani hepsi basit ise n tane özvektör lineer bağımsızdır. Eğer tekrar eden özdeğerler varsa yani en az bir özdeğer m katlılığa sahipse n tane lineer bağımsız özvektör olabilirde olmayabilirde..

Örnek 1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

λ özdeğerleri ve x özvektörleri $(A-\lambda I)x=0$ denklemini sağlamalıdır. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denkleminin sıfırdan farklı çözümleri olması için

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=0$$

olmalıdır. $\lambda_1=3$ ve $\lambda_2=3$ dir. Yani 3'ün katlılığı iki dir.

$\lambda_1=\lambda_2=3$'e karşı gelen özvektör,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1+x_2=0 \quad \begin{matrix} x_2=t \\ x_1=-t \end{matrix}$$

$$x^{(1)}=t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t\neq 0$$

dir. Genellikle $t=1$ alınarak özvektör $x^{(1)}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunur.

2) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

$(A-\lambda I)x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ denklemini sağlayan

λ değerleri $\det(A-\lambda I)=0$'ın kökleridir.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda+2=0$$

Bu denklemin kökleri $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-1$ dir. 2 basit özdeğer, -1 katlılığı iki olan özdeğerdir.

$\lambda_1=2$'ye karşı gelen $x^{(1)}$ özvektörü

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

denkleminin çözümüdür. Bu denklem çözülürse $x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ bulunur.

$\lambda_2=\lambda_3=-1$'e karşı gelen özvektörler

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$$

denkleminin çözümüdür. $x_3=k$, $x_2=t$ dersek $x_1=-k-t$ dir.

$$x=\begin{pmatrix}-k-t\\t\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$k=0$, $t=1$ ve $k=1$, $t=0$ alınarak $x^{(2)}$ ve $x^{(3)}$ özvektörleri

$$x^{(2)}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad x^{(3)}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

bulunur. $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ özvektörleri lineer bağımsızdır.

$A^{*}=A$ yani $\bar{a}_{ji}=a_{ij}$ şartını sağlayan matrislere <u>kendine-eşlenik</u> veya <u>Hermityan</u> matrisler denir. Hermityan matrisler önemli matris sınıfıdır. Eğer matrisin elemanları reel ise $A^T=A$ olur. Hermityan matrislerin özdeğer ve özvektörleri aşağıdaki özellikleri içerir.

1) Bütün özdeğerler reeldir.
2) katlılığa sahip özdeğerler olsa bile daima n tane lineer bağımsız özvektör vardır.
3) $x^{(1)}$ ve $x^{(2)}$, farklı özdeğerlere karşı gelen özvektörler ise $(x^{(1)}, x^{(2)})=0$ dır. Eğer bütün özdeğerler basit ise özvektörler ortogonal (dik) küme oluşturur.
4) m katlılığa sahip özdeğerler için birbirine dik özvektörler seçilebilir. Bu yüzden ortogonal küme oluşturacak şekilde lineer bağımsız n tane özvektör daima seçilebilir.

Sıfırdan farklı elemanları yalnız köşegen elemanlarında bulunan matrise <u>köşegen matris</u> denir. Cebirsel denklem sistemlerinin çözümlerinde, verilen matrisi köşegen matrise dönüştürmek, çözümün bulunmasında önemli kolaylık sağlar. Bu dönüşümlerde ise özvektörler kullanışlıdır. Bir A matrisinin n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olduğunu düşünelim. Özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve özvektörleri $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ olsun. Sütunları özvektörler $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ olan T matrisini oluşturalım. T'nin sütunları lineer bağımsız vektörler olduğundan $\det T \neq 0$ dır. Dolayısıyla T^{-1} vardır. Kolayca görülebileceği gibi AT matrisinin sütunları $Ax^{(1)}, Ax^{(2)}, \dots, Ax^{(n)}$ vektörleridir. Köşegen elemanları A'nın özdeğerleri olan

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

köşegen matrisi olmak üzere, $Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}$ olduğundan

$$AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^{(1)} & \cdots & \lambda_n x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n x_n^{(n)} \end{pmatrix} = TD$$

dır. Her iki tarafı soldan T^{-1} ile çarparsak

$$T^{-1}AT = D$$

elde ederiz. Bu yüzden eğer A'nın özdeğer ve özvektörleri biliniyorsa A'yı köşegen matrise dönüştürebiliriz.

Bu işleme <u>benzerlik dönüşümü</u> denir. A ve D matrislerine de <u>benzer</u> matrisler denir. Köşegen matrise benzer matrislere <u>köşegenleştirilebilir</u> denir.

Eğer A Hermityen ise T^{-1} i bulmak çok kolaydır. A'nın $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ özvektörlerini $(x^{(i)}, x^{(i)}) = 1$ (her i için) olacak şekilde dik seçebileceğimizden $T^{-1} = T^*$ dır. (Yani T'nin tersi T'nin kompleks eşleneğinin transpozesine eşittir.)

Eğer A matrisi n'den daha küçük lineer bağımsız özvektörlere sahip ise $T^{-1}AT = D$ olacak şekilde T matrisi bulunamayacağından A köşegenleştirilemez.

(Örnekler için lineer cebir ders notlarına bakınız;
http://www.mat.itu.edu.tr/ergezen/lineer/lineer.htm)